グラフ $G=(V, E)$

V: ノードの無限集合

E: 集合Vの2つの部分集合、つまり辺から成る集合

グラフが連結であることが重要な問題がある

→ 電力網のフェールセーフなど、どの辺を取り除いても連結なままか

ダイクストラのアルゴリズム … $O(n^2)$

ワーシャル-フロイドのアルゴリズム … $O(n^3)$、負の重みがある最短経路問題にもつかえる

重みがノードの直線距離とまったく関係ない場合には、人間の直観は役に立たなくなる

「木」… 連結していて非閉路的なグラフ

ノード数がnなら辺の数は$n-1$

最短経路は木(全域木)になる

プリムのアルゴリズム … 最小全域木を調べ

証明) 頂点集合を2つに分ける $(S, V \setminus S)$

Sと$V \setminus S$をまたぐ辺のうち最小の重みの辺をeとする

$v \xrightarrow{e} w$

Tを最小全域木とする

1. もし $e \in T$ なら終了
2. $e \notin T$ の場合を考える

Tにeを加えると、辺が1つ増えるので閉路ができる

これをCとする。

eは$(S, V/S)$をまたいでいる。

CはSからV/Sに移るならどこかで戻らないと閉路にならない

したがってCの中にはe以外に辺fが存在する

eは最小なので

$w(e) \leq w(f)$

$T' = T+e-f$ とすると T'は全域木(連結かつ非閉路)

しかも重みは $w(T') = w(T)+w(e)-w(f) \leq w(T)$

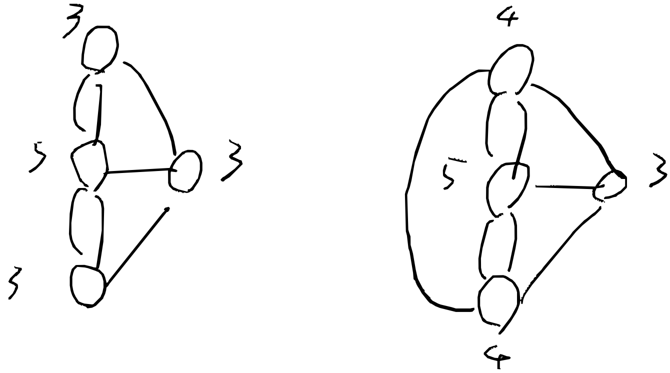
ところがTは最小全域木なので$w(T') < w(T)$はない

よって $w(T') = w(T)$

したがって辺eを含む最小全域木が存在することが示された。

クルスカルのアルゴリズム … greedy algorithm

重みの小さい辺から閉路を生まないように取っていく



どんなグラフでも次数が奇数になるノードの数は偶数個

証明) 数学的帰納法をつかう
辺の数が0のとき $A(0)=0$ となる
$A(m)$ が成り立つとき $A(m+1)$ を考える
1) 奇数同士のとき $A(m+1)$ は奇数の次数のノードが2つ減る
2) 偶数同士のとき 〃 2つ増える
3) 奇数と偶数のとき 偶奇が入れ替わるだけ

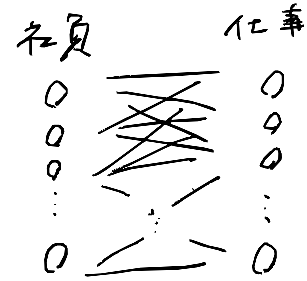
オイラー小路) 開始ノードsを出発してグラフのすべての辺をただ1回だけ通るそれぞれの経路

オイラー閉路) オイラー小路のうちsに再び戻ってくる経路

オイラー路) オイラー閉路を含むグラフ

オイラーの定理
孤立した辺を除いて連結したグラフ $G=(V,E)$ は以下の性質を満たす
a) Vの中の次数が奇数のノードがたかだか2つであるならば Gにはちょうど1個のオイラー小路が存在する
b) Vのノードの次数がすべて偶数であるならば Gにはちょうど1個のオイラー閉路が存在する

組み合わせ
ペアリング 最適の値



greedy algorithm ではベストな選択肢にはたどりつかない

中国人郵便配達問題：最小マッチング問題として解く
$O(n^3)$

チェス盤でナイトが動き回ってすべてのマスを埋めることができるか
→ ハミルトン路問題
全頂点をちょうど1回ずつ通る経路が存在するか
チェス盤は白黒に塗り分けられている → 2部グラフ

NP問題）yes/noで答えられる問題のうちyesの答えに効率的に検証可能な証明の存在するもの
ハミルトン閉路はNP困難

巡回セールスマン問題）半導体基盤にどの様に効率的に穴をあけていくかにもつかわれる。

最小巡回路の下限を知りたければ最小の1-木を探すこと

クリストファイズのアルゴリズムは最適解から50%の誤差の巡回路を示してくれる。