逆射

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, bend left, "f"] & b \arrow[l, bend left, "g"] \end{tikzcd} \qquad g \circ f = 1_a \qquad f \circ g = 1_b$$

f が逆射をもつとき f は可逆である

このとき f を同型射と呼ぶ
a と b は同型であるといい、$a \cong b$ と書いたり、$a \xrightarrow{\sim} b$ と書いたりする

f における逆射は1つだけ

証明) g_1, g_2 がともに f の逆射とすると

$$f \circ g_1 = 1_b = f \circ g_2 \quad \cdots ①$$
$$g_1 \circ f = 1_a = g_2 \circ f \quad \cdots ②$$

①の両辺に g_1 を合成して

$$g_1 \circ f \circ g_1 = g_1 \circ f \circ g_2$$
$$1_a \circ g_1 = 1_a \circ g_2$$
$$g_1 = g_2 \quad \square$$

同型な対象を同じものとして扱う

$$\begin{tikzcd} & x \arrow[dl, dashed] \arrow[dr, dashed] & \\ a \arrow[rr, bend left, "f"] & & b \arrow[ll, bend left, "g"] \end{tikzcd}$$

x の a との関係が b との関係と同じであることを示したい

$$\begin{tikzcd} & x \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, dashed, "f \circ s"] & \\ a \arrow[rr, "f"] & & b \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & x \arrow[dl, dashed, "g \circ t"'] \arrow[dr, "t"] & \\ a & & b \arrow[ll, "g"] \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} & x \arrow[dl, dashed, "g \circ (f \circ s)"'] \arrow[dr, "f \circ s"] & \\ a & & b \arrow[ll, "g"] \end{tikzcd}$$

$$s \longmapsto f \circ s \longmapsto g \circ (f \circ s) = s$$

モノイド

準同型が全単射にならない例

① $(A, \circ, 1)$ ただし $a \circ a = 1$

② $(A, \odot, 1)$ ただし $a \odot a = a$

準同型 $f : (A, \circ, 1) \to (A, \odot, 1)$ が全単射になるか

$f(a) = a$ になるか

$$f(a \circ a) = f(1) = 1$$
$$f(a) \odot f(a) = a \odot a = a$$

となるので全単射にならない

全順序集合

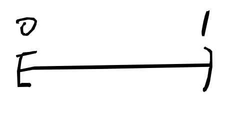
A と B と全単射 $A \xrightarrow{f} B$ を考える　逆射 $B \xrightarrow{g} A$

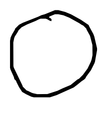
$b_1 \leqq b_2 \longrightarrow g(b_1) \leqq g(b_2)$ を示したい

対偶をとって　$g(b_1) > g(b_2) \to b_1 > b_2$ を示す

f は順序を保つので　$f(g(b_1)) > f(g(b_2)) \to b_1 > b_2$ $\square$

位相空間

$A =$ 　$0 \leqq x < 1$ の半開区間

$B =$ 　円周

$A \xrightarrow{f} B$ の f は連続

f は全単射

しかし f の逆射は連続ではない

位相空間では同型射は同相写像と呼び　上の例では成り立たない

$\updownarrow$

ホモトピー同値と呼ばれる

別の同一性の概念の方が重要

圏論の言葉で考えるなら

「等しい」とは等号が使えることではないということになる

等号は数と数式に対してしか適用できない

例えば　0という数が特殊な性質をもったただ1つの数であることを示すには、同じ性質をもつ別の数があることを仮定し　その数が結局0と等しいことを示す

↳ 二つの対象がただ同型であるだけでなく一意に同型、すなわちそれらの間に同型射が1つであって欲しい

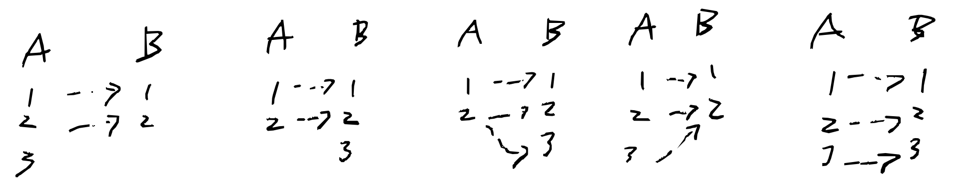
ここで　二つの同型射が等しいことを示す

↳ ここでは射のレベルでの等しさを考えていることになる

等号を同型射で置き換える

= 圏化

関数の非対称性



関数として成り立たない
- 出力がない
- 出力が一意でない

非対称的

対称的

単射関数

$\forall x, y \in A,\ f(x) = f(y) \rightarrow x = y$

例) $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $f(x) = x+1$ は単射

$f(x) = f(y) \Leftrightarrow x+1 = y+1 \Leftrightarrow x = y$

例) $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$, $f(x) = |x|$ は単射でない

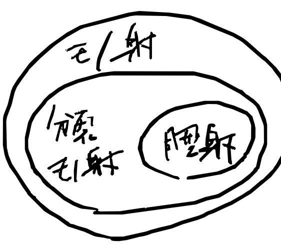
$-1 \neq 1$ だが $f(-1) = f(1)$

モノ射　$m \overset{s}{\underset{t}{\rightrightarrows}} a \xrightarrow{f} b$ があるとき

$f \circ s = f \circ t \rightarrow s = t$ を満たすなら射 f はモノ射

① 単射の圏論版であり

② 同型射であることの一部である

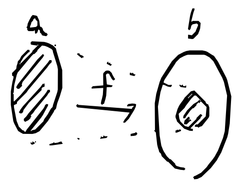


$a \xrightarrow{f} b \xrightarrow{g} a$, 1_a

g があるとき f は分裂モノ射

エピ射　$m \overset{s}{\underset{t}{\leftleftarrows}} a \xleftarrow{f} b$

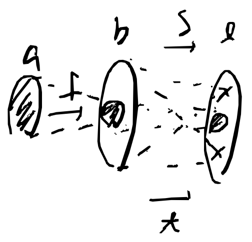
$sf = tf \rightarrow s = t$



関数 f で到達する部分は f の像と呼ばれる

$\mathrm{Im} f = \{f(x) \mid x \in a\}$

$\mathrm{Im} f$ は b の部分集合。$\mathrm{Im} f$ に含まれない部分を $\mathrm{NonIm} f$ とすると　$b = \mathrm{Im} f \cup \mathrm{NonIm} f$

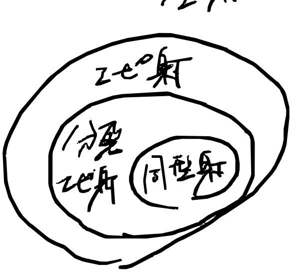


$\mathrm{Im} f$ は e の部分に対して等しく移るが

$\mathrm{NonIm} f$ は一致しないかもしれない

$s \neq t$ となるのは $\mathrm{NonIm} f$ が存在するときのみ

関数 $f: a \rightarrow b$ は $\mathrm{Im} f = b$ であるとき、そのときに限り全射である



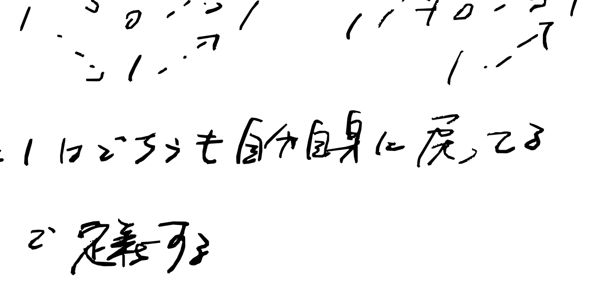
モノ射 $fs = ft$ から取り $s = t$
エピ射 $sf = tf$ から取り $s = t$
} 対極に考えられる

集合 Set では　モノ射 = 単射
エピ射 = 全射
同型射 = 全単射

全射だが分裂しない例を考える

$f: \{-1, 0, 1\} \rightarrow \{0, 1\}$ を $f(x) = |x|$ で定義する

$b \xrightarrow{f} a \xrightarrow{g} b$, 1_b としたい



0 と 1 はどちらも自分自身に戻ってる

次に $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$ を $f(x) = |x|$ で定義する

無限集合を考えると選択公理が関わる問題となる

選択公理は無限回の選択が可能といっている

選択公理はすべてのエピ射が分裂することと理論的に同値

圏論的に0は、その性質ではなく加法的単位元という
唯一の役割をもつことが重要

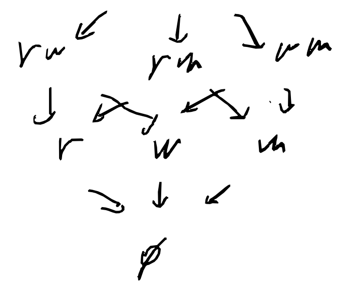
同様に1は乗法的単位元だし
-1は加法的逆元

ではiは? $i^2=-1$であるが これは$-i$でも同様
つまりiと$-i$は一方が決まるまで役割が固定されない
量子的

考えている性質をすべて満たす対象がいくつも見つかるなら
それらは一意に同型であり、圏論的に区別できない

r(裕福な)
w(白人)
m(男性)

rich white man は全ての矢印が出ていく
ϕ は全ての矢印が入っていく



形式的に考えると

圏Cの対象Iはすべての対象$X \in C$に対してただ1つの
射$I \to X$があるならば始対象という

IはCのすべての対象の中で普遍性をもつ

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, bend left, "f"] & b \arrow[l, bend left, "g"] \end{tikzcd}$$

aは始対象 $a \xrightarrow{1_a} a$ と $a \xrightarrow{f} b$ があるから
bは始対象 $b \xrightarrow{1_b} b$ と $b \xrightarrow{g} a$ があるから
2つの始対象があるが この2つに真の違いはない
普遍性における
一意性の考え方

IとI'をともに圏Cの始対象とすると、それらは一意に同型で
なければならない、すなわち、それらの間には一意な同型射が存在
する

Cにおいて始対象と同型な任意の対象は始対象

始対象や終対象になり損ねる例
- どこまでも続く $0 \to 1 \to 2 \to 3 \to \cdots$
- 枝分かれ $a \to b$, $a \to c$
- 射が輪になる $a \rightleftarrows b$
- 平行な射 $a \rightrightarrows b$
- 非連結 a b
- 空圏

逆に始対象でもあり終対象である対象も存在する

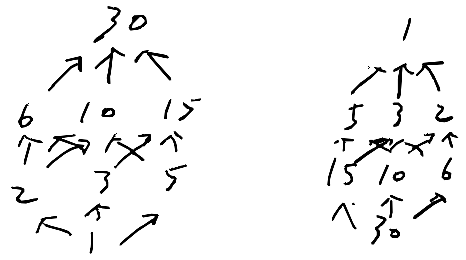
圏において終対象でも始対象でもある対象の
ことをヌル対象(null object)という
終対象を1、始対象を0とすると 0=1となることも生じる

圏の普遍性で考えることで、異なる文脈の間を移動して
比較することができる
ある圏での普遍性がほかの圏に文脈を置き換えると
異なる役割を果たす可能性がある

どんな普遍性も何らかの圏の始対象である
したがってすべての概念は始対象である

その他の普遍性
- Nの要素1のように、自由に生成される代数的構造は
関手と関係する、自由関手と忘却関手の随伴な関係
- 関手で終対象と始対象は保たれるのか

双対性



$\left\{\begin{array}{l}6は5と同じ\\10は3と同じ\\15は2と同じ\end{array}\right.$
$\left\{\begin{array}{l}2は15と同じ\\3は10と同じ\\5は6と同じ\end{array}\right\}$ かけ合わせると全て30になる

圏Cの双対圏をC^{op}と書く

- 対象：$\mathrm{ob}\,C^{op} = \mathrm{ob}\,C$
- 射：対象a,bが与えられたとき $C^{op}(a,b) = C(a,b)$
- 恒等射：変わらない
- 合成：逆になる

同じ議論を双対圏で行うことを双対的という
双対的な概念には「余(co-)」がつく

積 ⟷ 余積
極限 ⟷ 余極限
等化子 ⟷ 余等化子

Cにおいて射fがエピ射であるのはC^{op}においてそれがモノ射である、そしてその時に限る

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, bend left, "f"] & b \arrow[l, bend left, "g"] \end{tikzcd}$$

fが同型射、その逆射がgである場合
C^{op}でもCでも情報は変わらない
このようなものは自己双対とよばれる

Cの対象の集合 C_0
射の集合 C_1 とすると

$$\left.\begin{array}{l}\left(a \xrightarrow{f} b\right) \in C_1 \xrightarrow{\text{始点}} a \in C_0\\[2ex] \left(a \xrightarrow{f} b\right) \in C_1 \xrightarrow{\text{終点}} b \in C_0\end{array}\right\}$$

つまり
$$\begin{tikzcd} C_1 \arrow[r, shift left, "s"] \arrow[r, shift right, "t"'] & C_0 \end{tikzcd}$$

双対をとると sとtは名前が入れ換わるだけ

$$C_0 \xrightarrow{id} C_1$$
$$a \longmapsto \left(a \xrightarrow{1_a} a\right)$$

$$\begin{tikzcd} C_0 \arrow[r, "id"] & C_1 \arrow[r, shift left, "s"] \arrow[r, shift right, "t"'] & C_0 \end{tikzcd}$$
$$a \longmapsto \left(a \xrightarrow{1_a} a\right) \longmapsto a$$

$$\begin{tikzcd} C_0 \arrow[r, "id"] \arrow[rr, bend right, "1"'] & C_1 \arrow[r, shift left, "s"] \arrow[r, shift right, "t"'] & C_0 \end{tikzcd}$$

$s \circ id = 1$
$t \circ id = 1$

圏の対象aとbが与えられたとき、それらの積とは

$$\begin{tikzcd} & a\times b \arrow[dl, "p"'] \arrow[dr, "q"] & \\ a & & b \end{tikzcd}$$

射p,qを備えた対象a×bで

$$\begin{tikzcd} & x \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "g"] & \\ a & & b \end{tikzcd}$$

上の形と似た図式が与えられても

$$\begin{tikzcd} & x \arrow[d, dashed, "!k"] \arrow[ddl, bend right, "f"'] \arrow[ddr, bend left, "g"] & \\ & a\times b \arrow[dl, "p"'] \arrow[dr, "q"] & \\ a & & b \end{tikzcd}$$

上の図式が可換になる一意な射 $x \xrightarrow{k} a\times b$ があるもの

- 射pとqは射影と呼ばれる
- 射kは分解と呼ばれ、fとgを分解している
- 頂点と頂点からそれ以外のすべてへの射で構成される錐とよばれる図式がある。積の場合頂点は$a\times b$、それ以外はaとb

積によって誘導される重要な射

$$\begin{tikzcd} & x \arrow[d, dashed, "(f,g)"] \arrow[ddl, bend right, "f"'] \arrow[ddr, bend left, "g"] & \\ & a\times b \arrow[dl, "p"'] \arrow[dr, "q"] & \\ a & & b \end{tikzcd}$$

合成射からの誘導だと

$$\begin{tikzcd} c \arrow[dd, "f"'] & c\times d \arrow[l] \arrow[r] \arrow[d, dashed, "(f\times g)"] & d \arrow[dd, "g"] \\ & a\times b \arrow[dl, "p"'] \arrow[dr, "q"] & \\ a & & b \end{tikzcd}$$

$C\times D \longrightarrow A\times B$

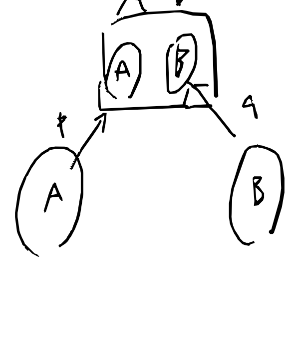
$(c,d) \longmapsto (f(c), g(d))$

余積

$$\begin{tikzcd} & x & \\ & \cdot \arrow[u, dashed, "!h"] & \\ a \arrow[ur, "p"] \arrow[uur, bend left, "f"] & & b \arrow[ul, "q"'] \arrow[uul, bend right, "g"'] \end{tikzcd}$$

- pとqは余射影、または挿入関数とよぶ
- 上の図式は余錐、余錐は頂点へと向かう余射影がある
- 余積を$a\sqcup b$や$a+b$のように書く

Setにおける余積



任意の集合Xに対して

$f: A\to X$ と $g: B\to X$

$h: A\sqcup B\to X$

の間には全単射がある

ただし $h\circ p=f$, $h\circ q=g$ を満たすものに限る

数の足し算とは

ただ1つの要素をもつ集合のすべて → 1とみなす

2つの 〃 → 2とみなす

⋮

a+bとはaとbという数になる任意の集合について圏論的な余積を考え、それから数にしてると考えられる。

たし算とかけ算は双対

群における余積は自由積（⟷積は直積）

引き戻しと押し出し

ファイバー積とも言う

引き戻し

シャツとパンツの集合から積を考えるときに、単にすべての集合ではなく同じ色の組み合わせを考える

普遍的な可換な正方図式（普遍錐） ⟶

$$\begin{tikzcd}
\text{色のそろったシャツとパンツ} \arrow[r] \arrow[d] & \text{シャツ} \arrow[d] \\
\text{パンツ} \arrow[r] & \text{色}
\end{tikzcd}$$

一般的には

図式　　錐　　普遍性

$x \to B$ ）部長に直接報告

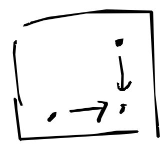
$x \to A \to B$ ）課長を介して部長に報告

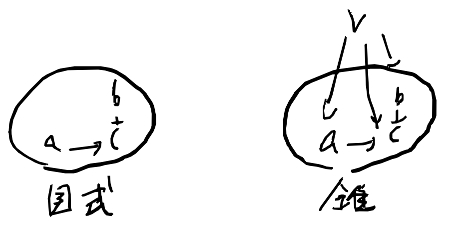
可換であるとは、どのルートでも報告内容が一致していること

普遍錐とは全社が見る公式の~~報告体系~~ = 可換

図式上の極限とはその図式上の普遍錐のことを言う

圏における引き戻しとは右に示すような形の図式上の極限のこと





図式　　錐

すべてを可換にするとは、$v \to c$ は合成射 $v \to a \to c$ と $v \to b \to c$ によって決まるという意味

$$\begin{tikzcd}
v \arrow[r] \arrow[d] & b \arrow[d] \\
a \arrow[r] & c
\end{tikzcd}$$

と考えられる（可換な正方図形）

すると普遍性とは

$$\begin{tikzcd}
x \arrow[drr, bend left, "g"] \arrow[ddr, bend right, "f"'] & & \\
& & b \arrow[d, "t"] \\
& a \arrow[r, "s"'] & c
\end{tikzcd}$$

が与えられたときに

$$\begin{tikzcd}
x \arrow[dr, dashed, "!k"] \arrow[drr, bend left, "g"] \arrow[ddr, bend right, "f"'] & & \\
& v \arrow[r, "q"] \arrow[d, "p"] & b \arrow[d, "t"] \\
& a \arrow[r, "s"'] & c
\end{tikzcd}$$

という分解があること

$pk = f$ かつ $qk = g$

ファイバー積は $A \times_C B = \{(a, b) \in A \times B \mid s(a) = t(b)\}$

積 → 錐の圏での終対象

余積 → 余錐の圏での始対象

引き戻し → 可換錐の圏での終対象

押し出し → 可換錐の圏での始対象

引き戻しを使って射の合成を定義する

$a \xrightarrow{f} b,\ b \xrightarrow{g} c \longmapsto a \xrightarrow{g \circ f} c$ を示したい

ここで

$C_1 \times_{C_0} C_1 = \{(f, g) \in C_1 \times C_1 \mid t(f) = s(g)\}$

という Set における引き戻しを考える

$$\begin{tikzcd}
C_1 \times_{C_0} C_1 \arrow[r] \arrow[d] & C_1 \arrow[d, "s"] \\
C_1 \arrow[r, "t"'] & C_0
\end{tikzcd}$$

合成とは関数 $C_1 \times_{C_0} C_1 \to C_1$ にいくつかの条件をつけたもの

$s(g \circ f) = s(f)$

$t(g \circ f) = t(g)$

が成り立つことを確かめる

$$\begin{tikzcd}
& C_1 \times_{C_0} C_1 \arrow[dl, "p"'] \arrow[d, "\text{合成}"] \arrow[dr, "q"] & \\
C_1 \arrow[d, "s"'] & C_1 \arrow[dl, "s"] \arrow[dr, "t"'] & C_1 \arrow[d, "t"] \\
C_0 & & C_0
\end{tikzcd}$$

合成可能な対 (f, g) を追跡

$$\begin{tikzcd}
& (a \xrightarrow{f} b,\ b \xrightarrow{g} c) \arrow[dl, mapsto, "p"'] \arrow[d, mapsto, "\text{合成}"] \arrow[dr, mapsto, "q"] & \\
a \xrightarrow{f} b \arrow[d, mapsto, "s"'] & a \xrightarrow{g \circ f} c \arrow[dl, mapsto, "s"] \arrow[dr, mapsto, "t"'] & b \xrightarrow{g} c \arrow[d, mapsto, "t"] \\
a & & b
\end{tikzcd}$$

$\mathbb{C}$と$\mathbb{D}$を圏とする関手(functor) $F: \mathbb{C} \to \mathbb{D}$とは
- 関数 $F: \mathrm{ob}\,\mathbb{C} \to \mathrm{ob}\,\mathbb{D}$
- すべての対象$x, y \in \mathbb{C}$に対して 関数 $F: \mathbb{C}(x, y) \to \mathbb{D}(Fx, Fy)$

として与えられたもので 関手性と呼ばれる次の条件を満たすもの
- 恒等射: すべての対象$x \in \mathbb{C}$に対して $F(1_x) = 1_{Fx}$
- 合成: すべての射 $x \xrightarrow{f} y \xrightarrow{g} z \in \mathbb{C}$に対して $F(g \circ f) = Fg \circ Ff$

より一般的な関手の定義
CとDを圏とするとき 関手$F: C \to D$とは↑の関手性を満たすような
- すべての対象$x \in C$に対象$Fx \in D$を結びつけ
- すべての射$x \xrightarrow{f} y \in C$に射$Fx \xrightarrow{Ff} Fy \in D$を結びつけるもの

である。

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "f"] \arrow[d, "s"'] & b \arrow[d, "t"] \\ c \arrow[r, "g"'] & d \end{tikzcd} \quad \xrightarrow{F} \quad \begin{tikzcd} Fa \arrow[r, "Ff"] \arrow[d, "Fs"'] & Fb \arrow[d, "Ft"] \\ Fc \arrow[r, "Fg"'] & Fd \end{tikzcd}$$

可換な正方図式

$Fa \to Fb \to Fd$ と
$Fa \to Fc \to Fd$ は等しいか
$Ft \circ Ff = F(t \circ f)$ ← 関手性から
$Fg \circ Fs = F(g \circ s)$ ↙
左の図から$t \circ f = g \circ s$ なので
$Ft \circ Ff = Fg \circ Fs$
右の図も可換な正方図式

$F: C \to D$を関手とし, fをCにおける同型射で
その逆射をgとする。このときFfはDにおける同型射で
その逆射はFgであることを示す。

$$\begin{aligned} Fg \circ Ff &= F(g \circ f) \quad \leftarrow \text{関手性により} \\ &= F1 \\ &= 1 \quad \leftarrow \text{関手性により} \end{aligned}$$
」

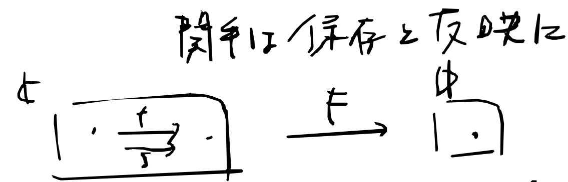
構造を忘れる関手のことを忘却関手と呼ぶ (Uに書かれる)
例えば,
モノイド ⟶ Set　　群 ⟶ モノイド
群 ⟶ Set　　可換群 ⟶ 群
トポロジー ⟶ Set

ように
$$\begin{tikzcd} & 環 \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ 群 \arrow[dr] & & モノイド \arrow[dl] \\ & \mathrm{Set} & \end{tikzcd}$$

集合$\{a, b\}$からモノイドをつくる
要素a, bを連結させるとabの語(word)が構成でき
空の語εを単位元とできる
$\{a, b\}$, $\cdot$(連結), ε で自由モノイドを構成できる

保存　$C \xrightarrow{F} D$: FはCの構造をDに適用するのか
反映　$C \xrightarrow{F} D$: Cの何かにFを適用してその結果が
Dにおいて特定の構造をもつなら
Cはその構造をもっていたといえるのか

どんな関手も同型射と可換図式を保存する
関手は保存と反映についてはどうか？



で考えると

同型射でない$f \in \mathbb{C}$はFによって$\mathbb{D}$の同型射(恒等射)に
写される

$t, s \in \mathbb{C}$があるとき$\mathbb{C}$の可換でない図式はFによって
$\mathbb{D}$の可換図式に写される

反変関手

$$\boxed{a \xrightarrow{f} b} \overset{F}{\longmapsto} \boxed{Fb \xrightarrow{Ff} Fa}$$

$$\boxed{a \xrightarrow{f} b \xrightarrow{g} c} \overset{F}{\longmapsto} \boxed{Fc \xrightarrow{Fg} Fb \xrightarrow{Ff} Fa}$$

関手 $C^{op} \to D$ のこと

定義 すべての小さな圏と関手からなる圏を Cat と書き
局所的に小さな圏と関手からなる圏を CAT と書く

$$\begin{tikzcd} \text{Data-with-structure} \arrow[d, shift left, "U"] \\ \text{Data} \arrow[u, shift left, "F"] \end{tikzcd}$$

自由関手と
忘却関手

UF はモナドの原型

代数とはモナドを介して
調べられるもの

メモ） 普遍性 → 関手の定義 → 随伴が
見える

図式とは $D : \underset{\sim}{J} \to \underset{\sim}{C}$
図の形　対象の圏

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d] & B \\ C & \end{tikzcd}$$

図式を1つの対象にまとめたい
・情報を失わず
・普遍的に

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] & \\ A & B & C \end{tikzcd}$$

$\boxed{A \ B}$ の極限が $A \times B$

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl] \arrow[d] \\ A & B \end{tikzcd}$$

$\boxed{A \to C \leftarrow B}$ の極限が引き戻し

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ A \arrow[dr] & & B \arrow[dl] \\ & C & \end{tikzcd}$$

$\boxed{}$（図式が空）の極限は終対象

双対をとると余極限がとれる（$A+B$, 押し出し、始対象）

メモ） 普遍性とは、
ある対象 U を考えたときに同じ条件をみたす
任意の対象 X から U への射が一意に存在すること　） 終対象
もしくは
U から X への射が一意に存在すること　｜ 始対象

関手 $F : C \to D$ が可逆であるためには、逆 G をもつ必要がある
つまり $GF = 1_C$ かつ $FG = 1_D$ ということ
圏に対するよりよい同一性の概念は次のような性質をもつ
関手によるものになる
・射については厳密に可逆なので $\forall f \in C,\ GFf = f$.
合成射 FG についても同様
・対象については同型を除いて可逆であればよいので、
$\forall c \in C,\ GFc \cong c$, 合成射 FG についても同様

$F : C \to D$ を関手とする
・すべての $a, b \in C$ に対して関数 $C(a, b) \to D(Fa, Fb)$ が
単射のとき、F は忠実（faithful）という。
局所的に単射ということもある。
・すべての $a, b \in C$ に対して、関数 $C(a, b) \to D(Fa, Fb)$ が
全射のとき、F は充満（full）という。
局所的に全射ということもある。

充満：$\forall Fx \xrightarrow{h} Fy \in D,\ \exists x \xrightarrow{f} y \in C,\ Ff = h$
忠実：$\forall f, g : x \to y \in C,\ Ff = Fg \Rightarrow f = g$
充満かつ忠実：$\forall Fx \xrightarrow{h} Fy \in D,\ \exists!\, x \xrightarrow{f} y \in C,\ Ff = h$

充満かつ忠実な関手は同型射を反映する
$F : C \to D$ を充満かつ忠実な関手、$a \xrightarrow{f} b$ を C の射とする。
f が同型射となるのは Ff が同型射であるとき、そしてそのときに限る
$Fa \xrightarrow{Ff} Fb$ は D の同型射で逆射は $Fb \xrightarrow{h} Fa$ と仮定、
C における f の逆射をみつける。
F は充満かつ忠実なので、$Fg = h$ であるような
一意な射 $b \xrightarrow{g} a \in C$ がある。この g が f の逆射を示す

$$\begin{aligned} F(g \circ f) &= Fg \circ Ff \\ &= h \circ Ff \\ &= 1_{Fa} && \leftarrow h \text{ を } Ff \text{ の逆と定義したので} \\ &= F1_a && \leftarrow \text{関手性によって} \end{aligned}$$

同様に $f \circ g = 1_b$ も示せる
したがって g は f の逆射であり、F は同型射を反映する。

充満かつ忠実 $\longleftrightarrow$ 関手が射のレベルで同型射

定義 関手 $F : C \to D$ は $\forall d \in D,\ \exists c \in C,\ F(c) \cong d$ という条件を
満たすならば（対象に関して）本質的全射という

定義 関手 $F : C \to D$ は充満かつ忠実であり、対象に関して本質的
全射であるとき、圏同値という

関手 $F, G: A \to B$ が与えられたとき、
F から G への自然変換は次のように与えられ
$\alpha: F \Rightarrow G$ と表記したりする

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, bend right, "G"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha"] & B \end{tikzcd}$$

- すべての対象 $x \in A$ に対する射 $Fx \xrightarrow{\alpha x} Gx \in B$ で
- すべての射 $x \xrightarrow{f} y \in A$ に対して自然性の正方図式と呼ばれる右の正方図式が可換なもの

$$\begin{tikzcd} Fx \arrow[r, "\alpha x"] \arrow[d, "Ff"'] & Gx \arrow[d, "Gf"] \\ Fy \arrow[r, "\alpha y"] & Gy \end{tikzcd}$$

射 α_x を x における α の成分という.

0次元	圏	$\cdot$
1次元	関手	$\cdot \longrightarrow \cdot$
2次元	自然変換	$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, bend left] \arrow[r, bend right] \arrow[r, phantom, "\Downarrow"] & \cdot \end{tikzcd}$

自然変換を関手の間の射として使い、関手とその全体を集めて圏にできる
圏 C と D に対する関手圏 - 対象：関手 $C \to D$
- 射：$F \to G$ は自然変換

関手 $F: C \to D$ が与えられたとき、その恒等自然変換
$1_F: F \Rightarrow F$ とは、すべての成分が恒等射であるもの

$$\begin{tikzcd} Fx \arrow[r, "1_{Fx}"] \arrow[d, "Ff"'] & Fx \arrow[d, "Ff"] \\ Fy \arrow[r, "1_{Fy}"] & Fy \end{tikzcd}$$

右のような関手と自然変換を考える
合成自然変換 $\beta \circ \alpha: F \Rightarrow H$ の成分を、
$x \in C$ に対して $(\beta \circ \alpha)_x = \beta_x \circ \alpha_x$ として定める。

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, bend left=60, "F"] \arrow[r, "G" description] \arrow[r, bend right=60, "H"'] & D \arrow[l, phantom, shift left=3, "\Downarrow\alpha"] \arrow[l, phantom, shift right=3, "\Downarrow\beta"] \end{tikzcd}$$

すなわち $Fx \xrightarrow{(\beta\circ\alpha)x} Hx = Fx \xrightarrow{\alpha x} Gx \xrightarrow{\beta x} Hx$ ということ

$$\begin{tikzcd} Fx \arrow[r, "(\beta\circ\alpha)x"] \arrow[d, "Ff"'] & Hx \arrow[d, "Hf"] \\ Fy \arrow[r, "(\beta\circ\alpha)y"] & Hy \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} Fx \arrow[r, "\alpha x"] \arrow[d, "Ff"'] & Gx \arrow[r, "\beta x"] \arrow[d, "Gf"'] & Hx \arrow[d, "Hf"'] \\ Fy \arrow[r, "\alpha y"] & Gy \arrow[r, "\beta y"] & Hy \end{tikzcd}$$

定義　圏 C が与えられたとき、関手 $C^{op} \to Set$ を C 上の前層という
C 上の前層圏とは、関手圏 $[C^{op}, Set]$ のこと

I と C を任意の圏とし v を C の対象とする.

$I \xrightarrow{\Delta v} C$

対象について　$i \longmapsto v$

射について　$i \xrightarrow{f} i' \longmapsto v \xrightarrow{1_v} v$

のとき Δv は v における定関手

図式 $D: I \to C$ が与えられたとき、v を頂点とする その図式上の錐とは自然変換 $\Delta v \Rightarrow D$ のことをいう

$\Delta v(0) = v \xrightarrow{\alpha_0} D(0)$

$\Delta v(1) = v \xrightarrow{\alpha_1} D(1)$

$$\begin{tikzcd} \Delta v(0) \arrow[r, "\alpha_0"] \arrow[d, "\Delta v(f)"'] & D(0) \arrow[d, "D(f)"] \\ \Delta v(1) \arrow[r, "\alpha_1"] & D(1) \end{tikzcd}$$

Δv がすべての対象に対して v を作り出し、すべての射に対して恒等射をつくり出すので

$\downarrow$

$$\begin{tikzcd} v \arrow[r, "\alpha_0"] \arrow[d, "1_v"'] & D(0) \arrow[d, "D(f)"] \\ v \arrow[r, "\alpha_1"] & D(1) \end{tikzcd}$$

$\downarrow$

$$\begin{tikzcd} & D(0) \arrow[d, "D(f)"] \\ v \arrow[ur, "\alpha_0"] \arrow[r, "\alpha_1"'] & D(1) \end{tikzcd}$$

可逆な自然変換を自然同型とよび
$F \Rightarrow G$ があるとき $F \cong G$ または $F \simeq G$ とかく
自然同型に対する二つの等価な特徴
- 抽象的（圏論的）：関手圏における同型射
- 具体的（点ごと）：それぞれの成分が同型射

定義　関手 $F: C \to D$ は関手 $G: D \to C$ と自然変換 $GF \cong 1_C$ および $FG \cong 1_D$ があるならば圏同値という
このとき圏 C と D は同値であるといい、F と G は互いの擬逆射であるという

$$\boxed{\begin{tikzcd} a \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\wr\!\wr"] \arrow[dr, phantom, "\times"] & b \arrow[d, phantom, "\wr\!\wr"] \\ a' \arrow[r] & b' \end{tikzcd}} \underset{G?}{\overset{F}{\rightleftarrows}} \boxed{x \xrightarrow{\sim} y}$$

$G \quad x \longmapsto a$
$\quad\;\; y \longmapsto b$

FG は？ $FG(x) = F(a) = x$
$FG(y) = F(b) = y$

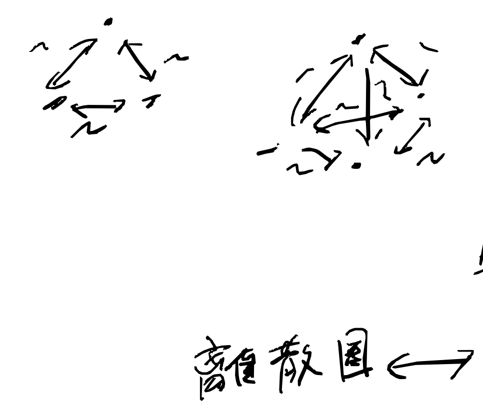
GF は？ $GF(a') = G(x) = a$
$GF(b') = G(y) = b$

GF は恒等関手ではないが、同型などこかに戻すはたらき、
よって自然変換 $GF \cong 1$ を定義できる

関手は各点同値である（すなわち、充満かつ忠実で対象に対して本質的全射である）とき、そしてそのときに限り圏同値である.

忠実：射をつぶしていない
充満：射をとりこぼしていない
本質的全射：対象も本質的には全部覆っている
⇒ 対象の圏 C と D は圏論的には同じ

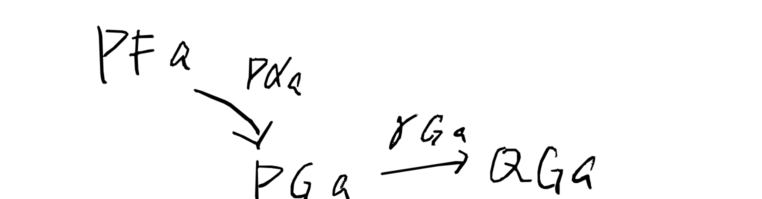
圏が同型 ⟶ 厳密に同じ対象と射をもつ
同値 ⟶ 同じ射の構造をもつ（太ったり痩せてはいるが本質的に同じ）



終圏 $\mathbf{1}$（対象が1つ、恒等射が1つ）と同値である圏
このような圏を密着圏または無秩序圏という

離散圏 ⟷ 密着圏

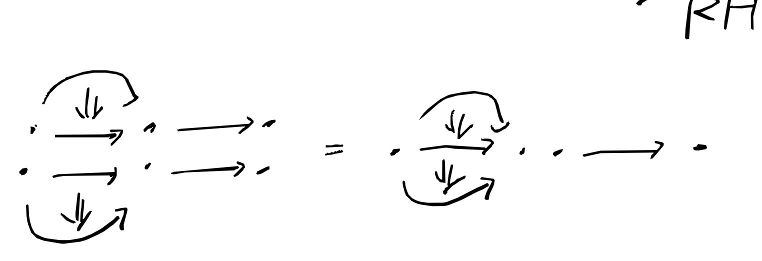
$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, bend left=60, "F"] \arrow[r] \arrow[r, bend right=60, "H"'] & B \arrow[l, phantom, shift left=3, "\Downarrow\alpha"] \arrow[l, phantom, shift right=3, "\Downarrow\beta"] \arrow[r, bend left=60, "P"] \arrow[r] \arrow[r, bend right=60, "R"'] & C \arrow[l, phantom, shift left=3, "\Downarrow\gamma"] \arrow[l, phantom, shift right=3, "\Downarrow\delta"] \end{tikzcd}$$

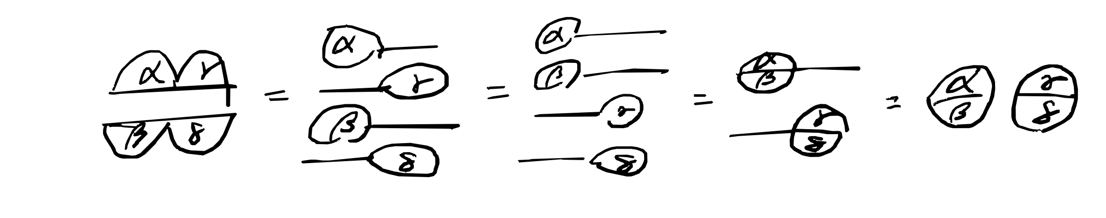


$(\delta * \beta) \circ (\gamma * \alpha) = (\delta \circ \gamma) * (\beta \circ \alpha)$

相互交換則

$$\begin{tikzcd} PFa \arrow[dr, "P\alpha_a"] & & & \\ & PGa \arrow[r, "\gamma Ga"] \arrow[d, "P\beta a"'] & QGa \arrow[d, "Q\beta a"] & \\ & PHa \arrow[r, "\gamma Ha"'] & QHa \arrow[dr, "\delta Ha"] & \\ & & & RHa \end{tikzcd}$$





$$\begin{tikzcd} & x \arrow[dl, dashed, "s"'] \arrow[dr, dashed, "t"] & \\ a \arrow[rr, bend left, "f"] & & b \arrow[ll, bend left, "g"] \end{tikzcd}$$

$x \xrightarrow{s} a \longrightarrow x \xrightarrow{f\circ s} b$

$x \xrightarrow{g\circ t} a \longrightarrow x \xrightarrow{t} b$

xとaの関係　　xとbの関係

抽象化して

$$\begin{tikzcd} C(x,a) \arrow[r, bend left, "f\circ\_"] & C(x,b) \arrow[l, bend left, "g\circ\_"] \end{tikzcd}$$

sやtを抽象化して、射sとtを集合の要素として、
そこに関数が作用すると考える

$$C(x,a) \xrightarrow{f\circ\_} C(x,b) \xrightarrow{g\circ\_} C(x,a)$$

$$s \longmapsto f\circ s \longmapsto g\circ(f\circ s) = s$$

よって $C(x,a)$ からそれ自身への合成は恒等関数

双射を考える

$$\begin{tikzcd} a \xrightarrow{s} x \quad a \xrightarrow{f} b \xrightarrow{t} x \arrow[r, bend left, leftrightarrow] & C(a,x) \arrow[r, bend left, "\_\circ g"] & C(b,x) \arrow[l, bend left, "\_\circ f"] & b \xrightarrow{g} a \xrightarrow{s} x \quad b \xrightarrow{t} x \end{tikzcd}$$

xからの射は…

$$C(x,a) \xrightarrow{f\circ\_} C(x,b)$$

$$x \xrightarrow{s} a \longmapsto x \xrightarrow{s} a \xrightarrow{f} b$$

xへの射は…

$$C(b,x) \xrightarrow{\_\circ f} C(a,x)$$

$$b \xrightarrow{s} x \longmapsto a \xrightarrow{f} b \xrightarrow{s} x$$

射の向きが入れ替わるというのは、後者の双射版が
反変関手であることを意味する